Über die Transformation von Reihen in Kettenbrüche, wo zugleich die Theorie nicht unwesentlich erweitert wird *

Leonhard Euler

§1 Wir wollen irgendeinen Kettenbruch betrachten, der sei

$$s = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

und zuerst wollen wir einfache Brüche suchen, die immer näher an den Wert von s herankommen, welche wir so bilden wollen, dass gilt

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = a\,, \quad \frac{B}{\mathfrak{B}} = a + \frac{1}{b}\,, \quad \frac{C}{\mathfrak{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}\,, \quad \frac{D}{\mathfrak{D}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}\,, \quad \text{etc.}$$

*Originaltitel: "De transformatione serierum in fractiones continuas, ubi simul haec theoria non mediocriter amplificatur", erstmals publiziert in „*Opuscula Analytica* 2 1785, pp. 138-177", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 661 - 700 ", Eneström-Nummer E593, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

Der letzte dieser Brüche wird also den wahren Wert des vorgelegten Kettenbruches ausdrücken. Daher tritt es sofort klar zutage, dass sein wird

$$\frac{A}{\mathfrak{A}} = \frac{a}{1}, \quad \frac{B}{\mathfrak{B}} = \frac{ab+1}{b}, \quad \frac{C}{\mathfrak{C}} = \frac{abc+a+c}{bc+1}.$$

Wie aber diese Brüche weiter fortschreiten, wollen wir auf die folgende Weise untersuchen.

§2 Es ist hier ersichtlich, dass aus dem ersten Bruch der zweite entspringt, wenn anstelle von a Nachstehendes geschrieben wird

$$a + \frac{1}{b},$$

und auf die gleiche Weise aus dem zweiten der dritte entspringt, wenn anstelle von b in Analogie geschrieben wird

$$b + \frac{1}{c},$$

aus dem dritten hingegen der vierte, wenn anstelle von c geschrieben wird

$$c + \frac{1}{d},$$

und so weiter. Daher also, wenn unbestimmt der Bruch $\frac{P}{\mathfrak{P}}$ aus den Indizes $a, b, c, d, \cdots p$ gebildet worden ist und die zwei folgenden $\frac{Q}{\mathfrak{Q}}$ und $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ gesetzt werden, welche den Indizes $a, b, c, d, \cdots q$ und $a, b, c, d, \cdots r$ entsprechen, ist es offenbar, dass aus dem Bruch $\frac{P}{\mathfrak{P}}$ der folgende aufgefunden $\frac{Q}{\mathfrak{Q}}$ wird, wenn anstelle von p geschrieben wird

$$p+\frac{1}{q},$$

aus diesem $\frac{Q}{\mathfrak{Q}}$ hingegen der folgende $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ entspringt, wenn anstelle von q geschrieben wird

$$q+\frac{1}{r}.$$

Nun tritt es in der Tat leicht klar zutage, dass im Bruch $\frac{P}{\mathfrak{P}}$ so der Zähler P wie der Nenner $\mathfrak{P}$ alle Buchstaben $a, b, c, d \cdots p$ so involvieren, dass sich keiner derer weiter als die erste Dimension erhebt. Wenn nämlich alle Indizes a, b, c, d, e etc. einander ungleich angesehen werden, wird kein Quadrat oder keine höhere Potenz jemals auftreten können.

§3 Deswegen werden so in P wie in $\mathfrak{P}$ Terme von zwei Arten auftauchen, während die einen den Index p überhaupt nicht enthalten, die anderen ihn hingegen als Faktor involvieren; daher wird der Zähler P eine Form von dieser Art $M+Np$ und auf die gleiche Weise $\mathfrak{P}$ diese $\mathfrak{M}+\mathfrak{N}p$ haben, sodass gilt

$$\frac{P}{\mathfrak{P}}=\frac{M+Np}{\mathfrak{M}+\mathfrak{N}p}.$$

In dieser Form wollen wir also anstelle von p schreiben

$$p+\frac{1}{q},$$

dass wir den Bruch $\frac{Q}{\mathfrak{Q}}$ erhalten, der also, nachdem wir mit q erweitert haben, sein wird

$$\frac{Q}{\mathfrak{Q}}=\frac{Mq+Npq+N}{\mathfrak{M}q+\mathfrak{N}pq+\mathfrak{N}}=\frac{N+(M+Np)q}{\mathfrak{N}+(\mathfrak{M}+\mathfrak{N}p)q}.$$

Um nun daher den folgenden Bruch $\frac{R}{\mathfrak{R}}$ zu erhalten, wollen wir anstelle von q schreiben

$$q + \frac{1}{r},$$

und nachdem wir diesen mit r erweitert haben, wird entspringen

$$\frac{R}{\mathfrak{Q}} = \frac{Nr + (M + Np)qr + M + Np}{\mathfrak{N}r + (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}p)qr + \mathfrak{M} + \mathfrak{N}p}$$

oder

$$\frac{R}{\mathfrak{R}} = \frac{M + Np + (N + Mq + Npq)r}{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}p + (\mathfrak{N} + \mathfrak{M}q + \mathfrak{N}pq)r}.$$

Weil also $P = M + Np$ und $Q = N + (M + Np)q$ ist, wird auch sein

$$R = P + Qr.$$

Auf die gleich Weise, weil $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} + \mathfrak{N}p$ und $\mathfrak{Q} = \mathfrak{N} + (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}p)q$ ist, wird sein

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}r.$$

Und do tritt es klar zutage, auf welche Weise jeder beliebige unserer einfachen Brüche leicht aus den zwei vorausgehenden gebildet werden kann.

§4 Siehe also diesen sehr klaren und einleuchtenden Beweis der allbekannten Regel für die Umwandlung eines Kettenbruches in einfache Brüche, wo so die Zähler wie die Nener nach demselben Gesetz aus den zwei vorhergehenden gebildet werden. Weil also für die zwei ersten Brüche $A = a$, $\mathfrak{A} = 1$, dann aber

$B = ab + 1$ und $\mathfrak{B} = b$ ist, werden aus diesen zwei Brüchen alle folgenden in einer leichten Aufgabe gebildet werden können. Damit dies klarer wird, wollen wir der Reihe nach unter die einzelnen Indizes a, b, c, d, e etc. die entsprechenden Brüche schreiben

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & c & d & e & f & g & \text{etc.} \\ \frac{A}{\mathfrak{A}} & \frac{B}{\mathfrak{B}} & \frac{C}{\mathfrak{C}} & \frac{D}{\mathfrak{D}} & \frac{E}{\mathfrak{E}} & \frac{F}{\mathfrak{F}} & \frac{G}{\mathfrak{G}} & \text{etc.} \end{array}$$

und so die Zähler wie die Nenner werden nach demselben Bildungsgesetz aus den zwei vorhergehenden auf die folgende Weise bestimmt werden

$$\begin{array}{cccc|cccc} \text{Für} & \text{die} & \text{Zähler} & & \text{Für} & \text{die} & \text{Nenner} & \\ A & = & a & & \mathfrak{A} & = & 1 & \\ B & = & Ab & +1 & \mathfrak{B} & = & b & \\ C & = & Bc & +A & \mathfrak{C} & = & \mathfrak{B}c & +\mathfrak{A} \\ D & = & Cd & +B & \mathfrak{D} & = & \mathfrak{C}d & +\mathfrak{B} \\ E & = & De & +C & \mathfrak{E} & = & \mathfrak{D}e & +\mathfrak{C} \\ F & = & Ef & +D & \mathfrak{F} & = & \mathfrak{E}f & +\mathfrak{D} \\ & & \text{etc.} & & & & \text{etc.} & \end{array}$$

Daher ist es klar, dass in der Reihe der Zähler der dem ersten vorausgehende Term aus dem Bildungsgesetz der Progression $= 1$ sein muss, in der Reihe der Nenner aber der dem ersten vorhergehende Term $= 0$ sein muss, sodass der dem ersten vorausgehende Bruch $\frac{1}{0}$ ist.

§5 Weil ja per se hinreichend klar ist, dass diese Brüche

$$\frac{A}{\mathfrak{A}},\quad \frac{B}{\mathfrak{B}},\quad \frac{C}{\mathfrak{C}},\quad \frac{D}{\mathfrak{D}}\quad \text{etc.}$$

ununterbrochen näher an die Wahrheit herankommen und schließlich den wahren Wert des Kettenbruches erschöpfen, ist es notwendig, dass die Differenzen zwischen zwei aufeinander folgenden dieser Brüche ununterbrochen kleiner werden, weswegen wir diese Differenzen der Reihe nach entwickeln wollen. Zuerst werden wir also haben

$$\mathrm{II} - \mathrm{I} = \frac{B\mathfrak{A} - A\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}.$$

Nun werden hier anstelle von B und $\mathfrak{B}$ die Werte aus der Tabelle eingesetzt und es wird der Zähler als $A\mathfrak{A}b + \mathfrak{A} - Ab$ hervorgehen, welche Form wegen $\mathfrak{A} = 1$ in 1 übergeht, sodass gilt

$$\frac{B}{\mathfrak{B}} - \frac{A}{\mathfrak{A}} = \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}.$$

Weiter wird sein

$$\mathrm{III} - \mathrm{II} = \frac{C\mathfrak{B} - B\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}},$$

dessen Nenner, wenn anstelle von C und $\mathfrak{C}$ die angegebenen Werte geschrieben wird, liefert

$$\mathfrak{B}(Bc + A) - B(\mathfrak{B}c + \mathfrak{A}) = A\mathfrak{B} - B\mathfrak{A}.$$

Gerade haben wir aber gesehen, dass $B\mathfrak{A} - A\mathfrak{B} = 1$ ist, woher dieser Zähler $= -1$ sein wird und daher

$$\frac{C}{\mathfrak{C}} - \frac{B}{\mathfrak{B}} = -\frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}.$$

Weiter ist

$$\mathrm{IV} - \mathrm{III} = \frac{D\mathfrak{C} - C\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}},$$

wo, wenn anstelle von D und $\mathfrak{D}$ die angegebenen Werte geschrieben werden, sein wird

$$\mathfrak{C}D - C\mathfrak{D} = \mathfrak{C}(Cd + B) - C(\mathfrak{C}d + \mathfrak{B}) = B\mathfrak{C} - C\mathfrak{B}.$$

Gerade haben wir aber gesehen, dass $C\mathfrak{B} - B\mathfrak{C} = -1$ ist, woher gefolgert wird

$$\frac{D}{\mathfrak{D}} - \frac{C}{\mathfrak{C}} = +\frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}.$$

Auf die gleiche Weise wird für die folgenden aufgefunden werden

$$\frac{E}{\mathfrak{E}} - \frac{D}{\mathfrak{D}} = -\frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{E}}, \quad \frac{F}{\mathfrak{F}} - \frac{E}{\mathfrak{E}} = -\frac{1}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}} \quad \text{etc.}$$

§6 Daher werden wir also unsere einzelnen Brüche allein aus dem ersten $\frac{A}{\mathfrak{A}} = a$ und den allein die germanischen Buchstaben involvierenden Brüchen definieren können, weil wir ja haben werden

$$\frac{B}{\mathfrak{B}} = a + \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$
$$\frac{C}{\mathfrak{C}} = a + \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}},$$
$$\frac{D}{\mathfrak{D}} = a + \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}},$$
$$\frac{E}{\mathfrak{E}} = a + \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} - \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{E}},$$
$$\frac{F}{\mathfrak{F}} = a + \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} - \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{E}} + \frac{1}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}}$$

etc.

§7 Weil also der letzte oder infinitesimale dieser Brüche den wahren Wert des vorgelegten Kettenbruches, welchen wir mit dem Buchstaben s bezeichnen, darbietet, wird sein

$$s = a + \frac{1}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - \frac{1}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} + \frac{1}{\mathfrak{C}\mathfrak{D}} - \frac{1}{\mathfrak{D}\mathfrak{E}} + \frac{1}{\mathfrak{E}\mathfrak{F}} + \frac{1}{\mathfrak{F}\mathfrak{G}} + \text{etc.};$$

und haben wir den Kettenbruch auf eine unendliche Reihe von Brüchen zurüchgeführt, all deren Zähler abwechselnd $+1$ und -1 sind, die Nenner hingegen allein durch die germanischen Buchstaben bestimmt werden, so dass es nicht nötig, die Werte der Buchstaben A, B, C etc. zu entwickeln, sondern es ausreicht, die folgenden Formeln entwickelt zu haben

$$\mathfrak{A} = 1, \quad \mathfrak{B} = b, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{B}c + \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{C}d + \mathfrak{B}, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{D}e + \mathfrak{C} \quad \text{etc.}$$

§8 Weil also jeder der beiden Größen mit der Größe a beginnt, wird sie vollkommen aus der Rechnung herausgehen, weil ja die germanischen Buchstaben von diesem in keiner Weise abhängen; daher gehen die Dinge, die wir bisher gefunden haben, darauf zurück, dass nach Vorlegen des Kettenbruches

$$s = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

wenn aus seinen Indizes b, c, d, e etc. die germanischen Buchstaben definiert werden, wo freilich ununterbrochen $\mathfrak{A} = 1$ ist, immer sein wird

$$s = \frac{1}{\mathfrak{AB}} - \frac{1}{\mathfrak{BC}} + \frac{1}{\mathfrak{CD}} - \frac{1}{\mathfrak{DE}} + \text{etc.},$$

welche Progression ins Unendliche fortschreitet, wenn der Kettenbruch ins Unendliche erstreckt wird, ansonsten aber aus einer endlichen Anzahl an Termen bestehen wird.

§9 Weil wir also auf diese Weise den Kettenbruch in eine gewöhnliche Reihe transformiert haben, wird es nicht schwer sein, irgendeine vorgelegte Reihe in einen Kettenbruch umzuwandeln. Es sei also diese unendliche Reihe vorgelegt

$$s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} + \text{etc.},$$

die Zähler welcher Brüche freilich alle abwechselnd mit den Vorzeichen $+$ und $-$ behaftete Einheiten sind, die Nenner hingegen irgendeine arithmetische Progression festlegen, was dennoch dem nicht im Weg steht, dass gänzlich alle Reihen in dieser Form enthalten sind, weil freilich die Terme der Reihe α, β, γ, δ nicht nur gebrochene Zahlen, sondern auch negativ werden können.

§10 Um also einen dieser Reihe gleichen Kettenbruch zu finden, wollen wir zuerst setzen

$$\mathfrak{AB} = \alpha, \quad \mathfrak{BC} = \beta, \quad \mathfrak{CD} = \gamma \quad \text{und so weiter,}$$

woher wir wegen $\mathfrak{A} = 1$ die folgenden Werte erlangen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B} &= \alpha, & \mathfrak{C} &= \frac{\beta}{\alpha}, \\ \mathfrak{D} &= \frac{\alpha\gamma}{\beta}, & \mathfrak{E} &= \frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}, \\ \mathfrak{F} &= \frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta}, & \mathfrak{G} &= \frac{\beta\delta\zeta}{\alpha\gamma\varepsilon}, \\ \mathfrak{H} &= \frac{\alpha\gamma\varepsilon\eta}{\beta\delta\zeta}, & \mathfrak{I} &= \frac{\beta\delta\zeta\theta}{\alpha\gamma\varepsilon\eta} \end{aligned}$$

$$\text{etc.}$$

Nun ist es also nur übrig, dass wir aus diesen Werten der germanischen Buchstaben die Indizes b, c, d, e etc. des Kettenbruches selbst finden.

§11 Aber aus den Formeln, mit denen oben die germanischen Buchstaben durch die Indizes des Kettenbruches bestimmt worden sind, wollen wir umgekehrt aus diesen Buchstaben die Indizes b, c, d, e, f etc. bestimmen und wir werden auffinden

$$b = \mathfrak{B}, \quad c = \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}, \qquad d = \frac{\mathfrak{D} - \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}, \qquad e = \frac{\mathfrak{E} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{D}}, \qquad f = \frac{\mathfrak{F} - \mathfrak{D}}{\mathfrak{E}} \quad \text{etc.}$$

Diese Werte wollen wir also der Reihe nach entwickeln, während wir anstelle der Buchstaben $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ etc. die zuvor gefundenen Formeln einsetzen.

§12 Zuerst war aber $\mathfrak{B} = a$, woher $b = \alpha$ wird; des Weiteren ist

$$\mathfrak{C} - \mathfrak{A} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha},$$

woher wird

$$c = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\alpha}.$$

Weiter wird sein

$$\mathfrak{D} - \mathfrak{B} = \frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\beta},$$

woher wird

$$\frac{\alpha\alpha(\gamma - \beta)}{\beta\beta}.$$

Des Weiteren werden wir haben

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{C} = \frac{\beta(\delta - \gamma)}{\alpha\gamma}$$

und daher

$$e = \frac{\beta\beta(\delta - \gamma)}{\alpha\alpha\gamma\gamma}.$$

Auf die gleiche Weise wird wegen

$$\mathfrak{F} - \mathfrak{D} = \frac{\alpha\gamma(\varepsilon - \delta)}{\beta\delta}$$

sein

$$f = \frac{\alpha\alpha\gamma\gamma(\varepsilon - \delta)}{\beta\beta\delta\delta}.$$

Auf dieselbe Weise wird wegen

$$\mathfrak{G} - \mathfrak{E} = \frac{\beta\delta(\zeta - \varepsilon)}{\alpha\gamma\varepsilon}$$

sein

$$g = \frac{\beta\beta\delta\delta(\zeta - \varepsilon)}{\alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon}$$

etc.

Auf die gleiche Weise werden also die Indizes des vorgelegten Kettenbruches, den wir suchen, auf die folgende Weise ausgedrückt sein

$$\begin{aligned}
b &= \alpha, & c &= \frac{\beta - \alpha}{\alpha\alpha}, \\
d &= \frac{\alpha\alpha(\gamma - \beta)}{\beta\beta}, & e &= \frac{\beta\beta(\delta - \gamma)}{\alpha\alpha\gamma\gamma}, \\
f &= \frac{\alpha\alpha\gamma\gamma(\varepsilon - \delta)}{\beta\beta\delta\delta}, & g &= \frac{\beta\beta\delta\delta(\zeta - \varepsilon)}{\alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon}, \\
h &= \frac{\alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon(\eta - \zeta)}{\beta\beta\delta\delta\zeta\zeta}, & i &= \frac{\beta\beta\delta\delta\zeta\zeta(\theta - \eta)}{\alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon\eta\eta}
\end{aligned}$$

etc.

§13 Es ist also nur nötig, dass wir diese Werte anstelle der Indizes b, c, d, e, f etc. in dem Kettenbruch

$$s = \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \text{etc.}}}}$$

einsetzen; weil ja aber dies Werte gebrochen sind, um die Form leichter von Partialbrüchen zu befreien, wollen wir aus den gefundenen Werten zuerst die Nenner beseitigen und es wird sein

$$\begin{aligned} &b = \alpha, && \alpha\alpha c = \beta - \alpha, \\ &\beta\beta d = \alpha\alpha(\gamma - \beta), && \alpha\alpha\gamma\gamma e = \beta\beta(\delta - \gamma), \\ &\beta\beta\delta\delta f = \alpha\alpha\gamma\gamma(\varepsilon - \delta), && \alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon e = \beta\beta\delta\delta(\zeta - \varepsilon), \\ &\beta\beta\delta\delta\zeta\zeta h = \alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon(\eta - \zeta), && \alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon\eta\eta i = \beta\beta\delta\delta\zeta\zeta(\theta - \eta) \end{aligned}$$

etc.

§14 Nun wollen wir den Kettenbruch selbst so transformieren, dass anstelle der Indizes dieselben Formeln auftauchen, deren Werte wir hier angeben haben. Natürlich wollen wir den zweiten Bruch mit $\alpha\alpha$, den dritten mit $\beta\beta$, den vierten mit $\alpha\alpha\gamma\gamma$, den fünften mit $\beta\beta\delta\delta$, den sechsten mit $\alpha\alpha\gamma\gamma\varepsilon\varepsilon$ etc. erweitern, dass diese Form hervorgeht

$$s = \cfrac{1}{b + \cfrac{\alpha\alpha}{\alpha\alpha c + \cfrac{\alpha\alpha\beta\beta}{\beta\beta d + \cfrac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{\alpha\alpha\gamma\gamma e + \cfrac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{\beta\beta\delta\delta f + \text{etc.}}}}}}$$

§15 Wenn wir daher nun anstelle dieser neuen Indizes $\alpha\alpha c$, $\beta\beta d$, $\alpha\alpha\gamma\gamma e$ etc. die oben gefundenen Werte einsetzen, wird der folgende Kettenbruch entspringen

$$s = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{\alpha\alpha}{\beta - \alpha + \cfrac{\alpha\alpha\beta\beta}{\alpha\alpha(\gamma - \beta) + \cfrac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma}{\beta\beta(\delta - \gamma) + \cfrac{\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma\delta\delta}{\alpha\alpha\gamma\gamma(\varepsilon - \delta) + \text{etc.}}}}}}$$

Wenn wir daher diese Form aufmerksam betrachten, entdecken wir, dass der dritte Bruch mit $\alpha\alpha$ gekürzt werden kann, dann aber der vierte mit $\beta\beta$, der fünfte mit $\gamma\gamma$, der sechste $\delta\delta$ etc; dann wird dieser Kettenbruch entspringen

$$s = \cfrac{1}{\alpha + \cfrac{\alpha\alpha}{\beta - \alpha + \cfrac{\beta\beta}{\gamma - \beta + \cfrac{\gamma\gamma}{\delta - \gamma + \cfrac{\delta\delta}{\varepsilon - \delta + \text{etc.}}}}}}$$

Daher wollen wir den folgenden Lehrsatz aufstellen

Lehrsatz I

§16 Wenn eine solche unendliche Reihe vorgelegt war

$$s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} - \text{etc.},$$

wird aus ihr immer ein solcher Kettenbruch gebildet werden können

$$\frac{1}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha}{\beta - \alpha + \cfrac{\beta\beta}{\gamma - \beta + \cfrac{\gamma\gamma}{\delta - \gamma + \text{etc.}}}}$$

§17 Diese Reduktion haben wir also durch mehrere Umwege hindurch aus der Betrachtung eines Kettenbruches gefunden, womit wir freilich unserem Vorhaben Genüge geleistet haben, weil wir ja irgendeine Reihe in einen Kettenbruch transformiert haben. Aber hier wird mit Recht eine direkte Methode verlangt, mit welcher unmittelbar aus der vorgelegten Reihe ohne jene Umwege ein jener gleicher Kettenbruch deriviert werden kann. Deshalb werde ich eine solche Methode, durch welche die Theorie der Kettenbrüche nicht unwesentlich illustriert werden wird, hier darstellen.

Problem 1

§18 Die vorgelegte unendliche Reihe

$$s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} - \text{etc.},$$

in einen Kettenbruch zu transformieren.

Lösung

Weil gilt

$$s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} - \text{etc.},$$

wollen wir festlegen

$$t = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\varepsilon} + \text{etc.}$$

und

$$u = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\zeta} + \text{etc.}$$

etc.

Daher wird also sein

$$s = \frac{1}{\alpha} - t = \frac{1 - \alpha t}{\alpha},$$

woher wird

$$\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{1 - \alpha t} = \alpha + \frac{\alpha\alpha t}{1 - \alpha t}.$$

Es ist aber

$$\frac{\alpha\alpha t}{1 - \alpha t} = \frac{\alpha\alpha}{-\alpha + \frac{1}{t}},$$

woher wird

$$\frac{1}{s} = \alpha + \frac{\alpha\alpha}{-\alpha + \frac{1}{t}}.$$

Auf die gleiche Weise wird also auch sein

$$\frac{1}{t} = \beta + \cfrac{\beta\beta}{-\beta + \cfrac{1}{u}}$$

und

$$\frac{1}{u} = \gamma + \cfrac{\gamma\gamma}{-\gamma + \cfrac{1}{v}}$$

etc.,

nach Einsetzen welcher Werte der folgende Kettenbruch erhalten werden wird

$$\frac{1}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha}{\beta - \alpha + \cfrac{\beta\beta}{\gamma - \beta + \cfrac{\gamma\gamma}{\delta - \gamma + \text{etc.}}}}$$

welches die im Lehrsatz dargebotene Form selbst ist.

§19 Wenn daher also diese Reihe vorgelegt ist

$$s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.} = \log 2,$$

wird wegen

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 4 \quad \text{etc.}$$

sein

$$\frac{1}{\log 2} = 1 + \cfrac{1\cdot 1}{1 + \cfrac{2\cdot 2}{1 + \cfrac{3\cdot 3}{1 + \text{etc.}}}}$$

Wenn wir aber diese Reihe annehmen

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.} = \frac{\pi}{4},$$

wird wegen

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7 \quad \text{etc.}$$

sein

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1\cdot 1}{2 + \cfrac{3\cdot 3}{2 + \cfrac{5\cdot 5}{2 + \text{etc.}}}}$$

welcher der einst zuerst von Brouncker vorgebrachte Kettenbruch selbst ist.

§20 Wir wollen nehmen

$$s = \int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

und nach der Integration $x = 1$ setzen; danach wird der Wert von s durch die folgende Reihe ausgedrückt werden

$$s = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \text{etc.},$$

sodass gilt

$$\alpha = m, \quad \beta = m+n, \quad \gamma = m+2n, \quad \delta = m+3n \quad \text{etc.}$$

daher wird also der folgende Kettenbruch ans Licht treten

$$\frac{1}{s} = m + \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \text{etc.}}}}$$

welchen Wert ich schon in XI. Tom. Commentar. Vet. unserer Akademie gegeben habe.

§21 Wenn aber diese Reihe vorgelegt ist

$$s = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \frac{1}{\varepsilon} + \text{etc.},$$

all deren Terme positiv seien, ist es nur nötig, dass im oberen Kettenbruch anstelle der Buchstaben β, δ, ζ, θ etc. $-\beta$, $-\delta$, $-\zeta$, $-\theta$ etc. geschrieben werden; dann wird also werden

$$\frac{1}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha}{-\beta - \alpha + \cfrac{\beta\beta}{\gamma + \beta + \cfrac{\gamma\gamma}{-\delta - \gamma + \cfrac{\delta\delta}{\varepsilon + \delta - \text{etc.}}}}}$$

welcher Bruch leicht auf diese Form zurückgeführt wird

$$\frac{1}{s} = \alpha - \cfrac{\alpha\alpha}{\alpha + \beta - \cfrac{\beta\beta}{\beta + \gamma - \cfrac{\gamma\gamma}{\gamma + \delta - \text{etc.}}}}$$

§22 Aber die vorgelegte Reihe selbst kann auf mehrere Arten transformiert werden, woher jedes Mal neue Kettenbrüche gefunden werden. Einige Formen von dieser Art wollen wir also hier genauer anschauen. Es sei also

$$\alpha = ab, \quad \beta = bc, \quad \gamma = cd, \quad \delta = de \quad \text{etc.},$$

dass man diese Reihe hat

$$s = \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} - \frac{1}{de} + \text{etc.},$$

und daher wird dieser Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{1}{s} = ab + \cfrac{aabb}{b(c-a) + \cfrac{bbcc}{c(d-b) + \cfrac{ccdd}{d(e-c) + \text{etc.}}}}$$

welcher leicht auf die folgende Form zurückgeführt wird

$$\frac{1}{s} = ab + \cfrac{aab}{c - a + \cfrac{bc}{d - b + \cfrac{cd}{e - c + \text{etc.}}}}$$

oder

$$\frac{1}{as} = b + \cfrac{ab}{c - a + \cfrac{bc}{d - b + \text{etc.}}}$$

welche Form uns den folgenden Lehrsatz an die Hand gibt

LEHRSATZ II

§23 Wenn eine Reihe dieser Form vorgelegt war

$$s = \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} - \frac{1}{de} + \frac{1}{ef} - \text{etc.},$$

entspringt aus ihr der folgende Kettenbruch

$$\frac{1}{as} = b + \cfrac{ab}{c - a + \cfrac{bc}{d - b + \cfrac{cd}{e - c + \cfrac{de}{f - d + \text{etc.}}}}}$$

§24 Diese Form, auch wenn sie leicht aus der vorhergehenden deriviert wird, ist daher bemerkenswert, weil sie einen Kettenbruch von höchst verschiedener Form liefert, woher es der Mühe wert sein wird, die oben erwähnten Beispiele auch an diese Form anzupassen. Weil also galt

$$\log 2 = \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.},$$

wird sein

$$\log 2 - 1 \quad = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \text{etc.}$$

und durch Addieren dieser Reihen entspringt

$$2\log 2 - 1 = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \text{etc.}$$

Hier ist also

$$s = 2\log 2 - 1$$

und

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 4 \quad \text{etc.};$$

daher wird also dieser Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{1}{2\log 2 - 1} = 2 + \cfrac{1 \cdot 2}{2 + \cfrac{2 \cdot 3}{2 + \cfrac{3 \cdot 4}{2 + \text{etc.}}}}$$

§25 Auf die gleiche Weise, weil gilt

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.},$$

wird sein

$$\frac{\pi}{4} - 1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

die Summe welcher Reihen gibt

$$\frac{\pi}{2} - 1 = \frac{2}{1 \cdot 3} - \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} - \frac{2}{7 \cdot 9} + \text{etc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} - \frac{1}{7 \cdot 9} + \text{etc.}$$

Hier wird also sein

$$s = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

dann aber

$$a = 1, \quad b = 3, \quad c = 5, \quad d = 7 \quad \text{etc.};$$

daher wird der daher entstehende Kettenbruch sein

$$\frac{4}{\pi-2} = 3 + \cfrac{1\cdot 3}{4 + \cfrac{3\cdot 5}{4 + \cfrac{5\cdot 7}{4 + \cfrac{7\cdot 9}{4 + \text{etc.}}}}}$$

§26 Allgemeiner wollen wir nun auch diese Transformation betrachten. Es bezeichne also $\triangle$ den Wert der Integralformel

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^n},$$

nachdem nach der Integration $x = 1$ gesetzt worden ist, und weil, wie wir oben in §20 gesehen haben, gilt

$$\triangle = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+3n} - \text{etc.},$$

wird sein

$$\triangle - \frac{1}{m} = - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \text{etc.},$$

nach Addieren welcher Reihen wird

$$2\triangle - \frac{1}{m} = \frac{n}{m(m+n)} - \frac{n}{(m+n)(m+2n)} - \frac{n}{(n+2n)(n+3n)} - \text{etc.};$$

daher wird durch Dividieren durch n sein

$$\frac{2m\triangle - 1}{mn} = \frac{1}{m(m+n)} - \frac{1}{(m+n)(m+2n)} - \frac{1}{(n+2n)(n+3n)} - \text{etc.}$$

Hier haben wir also

$$s = \frac{2m \triangle -1}{mn},$$

dann aber

$$a = m, \quad b = m+n, \quad c = m+2n, \quad d = m+3m \quad \text{etc.},$$

weshalb der daher gebildete Kettenbruch dieser sein wird

$$\frac{n}{2m \triangle -1} = m+n+\cfrac{m(m+n)}{2n+\cfrac{(m+n)(m+2n)}{2n+\cfrac{(m+2n)(m+3n)}{2n+\cfrac{(m+3n)(m+4n)}{2n+\text{etc.}}}}}$$

welche Form der vorhergehenden an Einfachheit in nichts nachsteht.

§27 Wir wollen nun der anfangs angenommenen Reihe

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} + \text{etc.}$$

irgendwelche Nenner zuteilen und es sei

$$s = \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} - \frac{d}{\delta} + \text{etc.}$$

und im ersten Lehrsatz müssen anstelle der Buchstaben α, β, γ, δ etc. entsprechend die Brüche $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, $\frac{\delta}{d}$ etc. geschrieben werden, wonach sich der

Kettenbruch so verhalten wird

$$\frac{1}{s}=\frac{\alpha}{a}+\cfrac{\frac{\alpha\alpha}{aa}}{\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha}{a}+\cfrac{\frac{\beta\beta}{bb}}{\frac{\gamma}{c}-\frac{\beta}{b}+\cfrac{\frac{\gamma\gamma}{cc}}{\frac{\delta}{d}-\frac{\gamma}{c}+\text{etc.}}}}$$

Nun werde, um die Brüche zu beseitigen, der erste Bruch mit ab erweitert, der zweite mit bc, der dritte mit cd und so weiter; dann wird aber, indem auf beiden Seiten mit a multipliziert wird, erhalten werden

$$\frac{a}{s}=\alpha+\cfrac{\alpha\alpha b}{a\beta-b\alpha+\cfrac{ac\beta\beta}{b\gamma-c\beta+\cfrac{bd\gamma\gamma}{c\delta-d\gamma+\text{etc.}}}}$$

Daher werde also der folgende Lehrsatz formuliert

LEHRSATZ III

§28 Wenn eine unendliche Reihe von dieser Form vorgelegt war

$$s=\frac{a}{\alpha}-\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}-\frac{d}{\delta}+\text{etc.},$$

wird aus ihr aus der folgende Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{a}{s}=\alpha+\cfrac{\alpha\alpha b}{a\beta-b\alpha+\cfrac{ac\beta\beta}{b\gamma-c\beta+\cfrac{bd\gamma\gamma}{c\delta-d\gamma+\text{etc.}}}}$$

§29 Um diesem zu illustrieren, sei diese Reihe vorgelegt

$$\frac{1}{1}-\frac{2}{2}+\frac{3}{3}-\frac{4}{4}+\frac{5}{5}-\text{etc.}=\frac{1}{2},$$

so dass $s=\frac{1}{2}$ ist; der daher entstehende Kettenbruch wird also sein

$$2=1+\cfrac{2}{0+\cfrac{3\cdot 4}{0+\cfrac{8\cdot 9}{0+\cfrac{15\cdot 16}{0+\text{etc.}}}}}$$

welche Form auf dieses unendliche Produkt zurüchgeführt wird

$$2=1+\frac{2\cdot 1^2\cdot 2\cdot 4\cdot 3^2\cdot 4\cdot 6\cdot 5^2\cdot 6\cdot 8\cdot 7^2\cdot\text{etc.}}{1\cdot 3\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 4^2\cdot 5\cdot 7\cdot 6^2\cdot 7\cdot 9\cdot 8^2\cdot\text{etc.}},$$

die Gültigkeit welcher nicht leicht erkannt wird, weil ja die Zahlen der Produkte in den Zählern und Nenner nicht gleich gesetzt werden können, auch wenn beide unendlich sind. Es kann hingegen kein Zweifel bestehen, dass der Wert dieses Produktes $=1$ ist.

§30 Wir wollen nun diese Reihe betrachten

$$s=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\text{etc.},$$

deren Summe $s=\log 2-\frac{1}{2}$ ist. Weil also gilt

$$\begin{aligned} &a=1, \quad b=2, \quad c=3, \quad d=4 \quad \text{etc.},\\ &\alpha=2, \quad \beta=3, \quad \gamma=4, \quad \delta=5 \quad \text{etc.,}\end{aligned}$$

wird der daher entstandene Bruch dieser sein

$$\frac{1}{\log 2 - \frac{1}{2}} = 2 + \cfrac{1 \cdot 2 \cdot 2^2}{-1 + \cfrac{1 \cdot 3 \cdot 3^2}{-1 + \cfrac{2 \cdot 4 \cdot 4^2}{-1 + \cfrac{3 \cdot 5 \cdot 5^2}{-1 + \text{etc.}}}}}$$

§31 Wenn wir daher aber diese Reihe annehmen

$$s = \frac{2}{1} - \frac{3}{2} + \frac{4}{3} - \frac{5}{4} + \frac{6}{5} - \text{etc.},$$

deren Wert $\frac{1}{2} + \log 2$ ist, werden wir haben

$$\begin{aligned} a &= 2, \quad b = 3, \quad c = 4, \quad d = 5 \quad \text{etc.,} \\ \alpha &= 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 4 \quad \text{etc.;} \end{aligned}$$

daher wird also dieser Kettenbruch entspringen

$$\frac{2}{\frac{1}{2} + \log 2} = 1 + \cfrac{1 \cdot 3 \cdot 1^2}{1 + \cfrac{2 \cdot 4 \cdot 2^2}{1 + \cfrac{3 \cdot 5 \cdot 3^2}{1 + \cfrac{4 \cdot 6 \cdot 4^2}{1 + \text{etc.}}}}}$$

oder

$$\frac{4}{2\log 2+1} = 1 + \cfrac{1^3\cdot 3}{1 + \cfrac{2^3\cdot 4}{1 + \cfrac{3^3\cdot 5}{1+\text{etc.}}}}$$

PROBLEM II

die vorgelegte unendliche Reihe

$$s = \frac{x}{\alpha} - \frac{xx}{\beta} + \frac{x^2}{\gamma} - \frac{x^4}{\delta} + \text{etc.}$$

in einen Kettenbruch zu transformieren.

LÖSUNG

§32 Es werden die folgenden aus der vorgelegten Reihe gebildeten Reihen betrachtet

$$t = \frac{x}{\beta} - \frac{xx}{\gamma} + \frac{x^2}{\delta} - \frac{x^4}{\varepsilon} + \text{etc.},$$

weiter

$$u = \frac{x}{\gamma} - \frac{xx}{\delta} + \frac{x^2}{\varepsilon} - \frac{x^4}{\zeta} + \text{etc.},$$
$$v = \frac{x}{\delta} - \frac{xx}{\varepsilon} + \frac{x^2}{\zeta} - \frac{x^4}{\eta} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

und es wird sein

$$s = \frac{x}{\alpha} - tx = \frac{x(1-\alpha t)}{\alpha};$$

daher wird

$$\frac{x}{s} = \frac{\alpha}{1-\alpha t} = \alpha + \frac{\alpha\alpha t}{1-\alpha t} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha}{-\alpha + \cfrac{1}{t}}.$$

Daher wird also sein

$$\frac{x}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha x}{-\alpha x + \cfrac{x}{t}};$$

auf die gleiche Weise wird aber sein

$$\frac{x}{t} = \beta + \cfrac{\beta\beta x}{-\beta x + \cfrac{x}{u}}.$$

Wenn also all diese Werte der Reihe nach eingesetzt werden, wird dieser Kettenbruch entspringen

$$\frac{x}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha x}{\beta - \alpha x + \cfrac{\beta\beta x}{\gamma - \beta x + \cfrac{\gamma\gamma x}{\delta - \gamma x + \text{etc.}}}}$$

§33 Wenn wir daher hier überall anstelle von x den Bruch $\frac{x}{y}$ schreiben, dass wir diese Reihe haben

$$s = \frac{x}{\alpha y} - \frac{xx}{\beta yy} + \frac{x^3}{\gamma y^3} - \frac{x^4}{\delta y^4} + \text{etc.},$$

dann wird der daher entstandene Kettenbruch dieser sein

$$\frac{x}{sy} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha x : y}{\beta - \frac{\alpha x}{y} + \cfrac{\beta\beta x : y}{\gamma - \frac{\beta x}{y} + \text{etc.}}}$$

welcher von den Partialbrüchen befreit gibt

$$\frac{x}{sy} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha x}{\beta y - \alpha x + \cfrac{\beta\beta xy}{\gamma y - \beta x + \cfrac{\gamma\gamma xy}{\delta y - \gamma x + \text{etc.}}}}$$

Daher entsprießt der folgende Lehrsatz

LEHRSATZ IV

§34 Wenn eine unendliche Reihe von dieser Art vorgelegt war

$$s = \frac{x}{\alpha y} - \frac{xx}{\beta yy} + \frac{x^3}{\gamma y^3} - \frac{x^4}{\delta y^4} + \text{etc.},$$

wird aus ihr dieser Kettenbruch gebildet werden können

$$\frac{x}{sy} = \alpha + \cfrac{\alpha\alpha x}{\beta y - \alpha x + \cfrac{\beta\beta xy}{\gamma y - \beta x + \cfrac{\gamma\gamma xy}{\delta y - \gamma x + \cfrac{\delta\delta xy}{\varepsilon y - \delta x + \text{etc.}}}}}$$

§35 Weil gilt

$$\log\left(1+\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} - \frac{xx}{2yy} + \frac{x^3}{2y^3} - \frac{x^4}{4y^4} + \text{etc.},$$

wird nach Setzen von

$$s = \log\left(1+\frac{x}{y}\right)$$

sein

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 4 \quad \text{etc.}$$

und daher wird dieser Kettenbruch entsprießen

$$\frac{x}{\log\left(1+\frac{x}{y}\right)} = y + \cfrac{xy}{2y - x + \cfrac{4xy}{3y - 2x + \cfrac{9xy}{4y - 3x + \text{etc.}}}}$$

§36 Weil der Bogen, dessen Tangens t ist, mit dieser Reihe ausgedrückt wird

$$\arctan t = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \text{etc.},$$

wird sein

$$t \arctan t = \frac{tt}{1} - \frac{t^4}{3} + \frac{t^6}{5} - \frac{t^8}{7} + \frac{t^{10}}{9} - \text{etc.}$$

Nun werde also $tt = \frac{x}{y}$ gesetzt, sodass $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ ist, und es wird werden

$$\sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \arctan \frac{x}{y} = \frac{x}{y} - \frac{xx}{3yy} + \frac{x^3}{5y^3} - \frac{x^4}{7y^4} + \text{etc.}$$

Daher ist also

$$s = \sqrt{\frac{x}{y}} \cdot \arctan \frac{x}{y},$$

dann aber

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 7 \quad \text{etc.};$$

daher wird der daraus entsprießende Kettenbruch dieser sein

$$\frac{\sqrt{\frac{x}{y}}}{\arctan \sqrt{\frac{x}{y}}} = y + \cfrac{xy}{3y - x + \cfrac{9xy}{5y - 3x + \cfrac{25xy}{7y - 5x + \text{etc.}}}}$$

Wie wenn beispielsweise $x = 1$ und $y = 3$ war, wird man wegen

$$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

diesen Kettenbruch haben

$$\frac{6\sqrt{3}}{\pi} = 3 + \cfrac{1\cdot 3}{8 + \cfrac{3\cdot 9}{12 + \cfrac{3\cdot 25}{16 + \text{etc.}}}}$$

§37 Wenn wir daher im Fall der Lehrsatzes anstelle der Buchstaben α, β, γ, δ etc. diese Brüche schreiben

$$\frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta}{b}, \quad \frac{\gamma}{c}, \quad \frac{\delta}{d} \quad \text{etc.},$$

dass wir diese Reihe haben

$$s = \frac{ax}{\alpha y} - \frac{bxx}{\beta yy} + \frac{cx^3}{\gamma y^3} - \frac{dx^4}{\delta y^4} + \text{etc.},$$

wird der daher gebildete Kettenbruch sich so verhalten

$$\frac{x}{s} = \frac{\alpha}{a}y + \cfrac{\alpha\alpha xy : aa}{\frac{\beta}{b}y - \frac{\alpha}{a}x + \cfrac{\beta\beta xy : bb}{\frac{\gamma}{c}y - \frac{\beta}{b}x + \cfrac{\gamma\gamma xy : cc}{\frac{\delta}{d}y - \frac{\gamma}{c}x + \text{etc.}}}}$$

Hier werde nun auf beiden Seiten mit a multipliziert, darauf werde der erste Bruch mit ab erweitert, der zweite mit bc, der dritte mit cd etc. und der Kettenbruch wird diese Form annehmen

$$\frac{ax}{s} = \alpha y + \cfrac{\alpha\alpha bxy}{a\beta y - b\alpha x + \cfrac{\beta\beta acxy}{b\gamma y - c\beta x + \cfrac{\gamma\gamma bdxy}{c\delta y - d\gamma x + \text{etc.}}}}$$

woher es der Mїhe wert sein wird, den folgenden Lehrsatz hinzuzufügen

Lehrsatz V

§38 Wenn eine unendliche Reihe dieser Art vorgelegt war

$$s = \frac{ax}{\alpha y} - \frac{bxx}{\beta yy} + \frac{cx^3}{\gamma y^3} - \frac{dx^4}{\delta y^4} + \text{etc.},$$

wird daher der folgende Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{ax}{s} = \alpha y + \cfrac{\alpha\alpha bxy}{a\beta y - b\alpha x + \cfrac{\beta\beta acxy}{b\gamma y - c\beta x + \cfrac{\gamma\gamma bdxy}{c\delta y - d\gamma x + \text{etc.}}}}$$

Problem III

Diese vorgelegte unendliche Reihe

$$s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta} + \text{etc.}$$

in einen Kettenbruch umzuwandeln.

Lösung

Aus der vorgelegten Reihe wollen wir die folgenden Reihen bilden

$$t = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\beta\gamma\delta} - \frac{1}{\beta\gamma\delta\varepsilon} + \text{etc.},$$
$$u = \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma\delta} + \frac{1}{\gamma\delta\varepsilon} - \frac{1}{\gamma\delta\varepsilon\zeta} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

und wir werden haben

$$s = \frac{1-t}{\alpha}, \quad t = \frac{1-u}{\beta}, \quad u = \frac{1-v}{\gamma} \quad \text{etc.};$$

daher leiten wir also ab

$$\frac{1}{s} = \frac{\alpha}{1-t} = \alpha + \frac{\alpha t}{1-t} = \alpha + \cfrac{\alpha}{-1 + \cfrac{1}{t}},$$

Auf die gleiche Weise wird aber sein

$$\frac{1}{t} = \beta + \cfrac{\beta}{-1 + \cfrac{1}{u}}, \quad \frac{1}{u} = \gamma + \cfrac{\gamma}{-1 + \cfrac{1}{v}} \quad \text{etc.};$$

daher wird nach Einsetzen der zweiten in den ersten Werten dieser Kettenbruch erhalten werden

$$\frac{1}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha}{\beta - 1 + \cfrac{\beta}{\gamma - 1 + \cfrac{\gamma}{\delta - 1 + \text{etc.}}}}$$

woher wir den folgenden Lehrsatz ableiten.

LEHRSATZ VI

§40 Wenn eine unendliche Reihe von dieser Art vorgelegt war

$$s = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta} + \text{etc.},$$

wird daraus dieser Kettenbruch gebildet werden können

$$\frac{1}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha}{\beta - 1 + \cfrac{\beta}{\gamma - 1 + \cfrac{\gamma}{\delta - 1 + \text{etc.}}}}$$

§41 Wenn e die Zahl bezeichnet, deren hyperbolischer Logarithmus die Einheit ist, ist bekannt, dass gilt

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \text{etc.}$$

oder

$$\frac{e-1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{etc.}$$

Hier wird also $s = \frac{e-1}{e}$, dann aber

$$\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 4 \quad etc.;$$

deshalb ist der daher herstammende Kettenbruch

$$\frac{e}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \text{etc.}}}}$$

§42 Weil also gilt

$$\frac{e}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{e-1}$$

es aber nicht schwer bewiesen werden kann, wenn galt

$$\cfrac{a}{a + \cfrac{b}{b + \cfrac{c}{c + \text{etc.}}}} = s,$$

dass dann sein wird

$$a + \cfrac{a}{b + \cfrac{b}{c + \cfrac{c}{d + \text{etc.}}}} = \frac{s}{1-s},$$

wird für unseren Fall sein

$$s = \frac{1}{e-1}, \quad a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3 \quad \text{etc.},$$

nach Einsetzen welcher Werte werden wird

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\text{etc.}}}}=\frac{1}{e-2}.$$

§43 Wenn daher im Lehrsatz VI anstelle der Buchstaben α, β, γ, δ etc. diese Brüche geschrieben werden

$$\frac{\alpha}{a},\quad \frac{\beta}{b},\quad \frac{\gamma}{c},\quad \frac{\delta}{d}\quad \text{etc.},$$

dass ist

$$s=\frac{a}{\alpha}-\frac{ab}{\alpha\beta}+\frac{abc}{\alpha\beta\gamma}-\frac{abcd}{\alpha\beta\gamma\delta}+\text{etc.},$$

wird der daher entsprießende Kettenbruch dieser sein

$$\frac{1}{s}=\frac{\alpha}{a}+\cfrac{\alpha:a}{\frac{\beta}{b}-1+\cfrac{\beta:b}{\frac{\gamma}{c}-1+\cfrac{\gamma:c}{\frac{\delta}{d}-1+\text{etc.}}}}$$

Wenn daher nun zuerst auf beiden Seiten mit a multipliziert wird, dann aber der erste Bruch mit b erweitert wird, der zweite mit c, der dritte mit d etc., wird diese Form entspringen

$$\frac{a}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha b}{\beta - b + \cfrac{\beta c}{\gamma - c + \cfrac{\gamma d}{\delta - d + \text{etc.}}}}$$

welche Erkenntnis im folgenden Lehrsatz eingeschlossen werde

Lehrsatz VII

§44 Wenn eine unendliche Reihe dieser Art vorgelegt war

$$s = \frac{a}{\alpha} - \frac{ab}{\alpha\beta} + \frac{abc}{\alpha\beta\gamma} - \frac{abcd}{\alpha\beta\gamma\delta} + \text{etc.},$$

wird daher dieser Kettenbruch abgeleitet

$$\frac{a}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha b}{\beta - b + \cfrac{\beta c}{\gamma - c + \cfrac{\gamma d}{\delta - d + \text{etc.}}}}$$

§45 Wir wollen diesen auf die folgende unendliche Reihe anwenden

$$s = \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \text{etc.},$$

deren Summe bekannt ist, $s = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ zu sein; dann wird also sein

$$\begin{array}{lllll} a = 1, & b = 3, & c = 5, & d = 7, & \text{etc.,} \\ \alpha = 2, & \beta = 4, & \gamma = 6, & \delta = 8, & \text{etc.;} \end{array}$$

der daraus entstehende Kettenbruch wird also dieser sein

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \cfrac{2\cdot 3}{1 + \cfrac{4\cdot 5}{1 + \cfrac{6\cdot 7}{1 + \text{etc.}}}}$$

Wenn auf beiden Seiten die Einheit weggeschafft wird, wird sein

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = 1 + \cfrac{2\cdot 3}{1 + \cfrac{4\cdot 5}{1 + \cfrac{6\cdot 7}{1 + \text{etc.}}}}$$

woher abgeleitet wird

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1\cdot 1}{1 + \cfrac{2\cdot 3}{1 + \cfrac{4\cdot 5}{1 + \cfrac{6\cdot 7}{1 + \text{etc.}}}}}$$

PROBLEM IV

Eine vorgelegte unendliche Reihe von dieser Form

$$s = \frac{x}{\alpha} - \frac{xx}{\alpha\beta} + \frac{x^3}{\alpha\beta\gamma} - \frac{x^4}{\alpha\beta\gamma\delta} + \text{etc.}$$

in einen Kettenbruch umzuwandeln.

§46 Wir wollen wie bisher festlegen

$$t = \frac{x}{\beta} - \frac{xx}{\beta\gamma} + \frac{x^3}{\alpha\beta\gamma} - \frac{x^4}{\beta\gamma\delta\varepsilon} + \text{etc.}$$

und

$$u = \frac{x}{\gamma} - \frac{xx}{\gamma\delta} + \frac{x^3}{\beta\gamma\delta} - \frac{x^4}{\gamma\delta\varepsilon\zeta} + \text{etc.},$$

sodass gilt

$$s = \frac{x - tx}{\alpha};$$

daher wird

$$\frac{x}{s} = \frac{\alpha}{1-t} = \alpha + \frac{\alpha t}{1-t}.$$

Es ist aber

$$\frac{\alpha t}{1-t} = \frac{\alpha}{-1 + \frac{1}{t}} = \frac{\alpha x}{-x + \frac{x}{t}}$$

und so wird sein

$$\frac{x}{s} = \alpha + \frac{\alpha x}{-x + \frac{x}{t}}.$$

Auf die gleiche Weise wird also aufgefunden werden

$$\frac{x}{t} = \beta + \cfrac{\beta x}{-x + \cfrac{x}{u}}, \quad \frac{x}{u} = \gamma + \cfrac{\gamma x}{-x + \cfrac{x}{v}} \quad \text{etc.}$$

Wenn daher also diese Werte ununterbrochen in den jeweils vorausgehenden Werten eingesetzt werden, wird der folgende Kettenbruch erhalten werden

$$\frac{x}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha x}{\beta - x + \cfrac{\beta x}{\gamma - x + \cfrac{\gamma x}{\delta - x + \text{etc.}}}}$$

und daher entsprießt der folgende Lehrsatz

LEHRSATZ VIII

§47 Wenn eine unendliche Reihe von dieser Art vorgelegt war

$$s = \frac{x}{\alpha} - \frac{xx}{\alpha\beta} + \frac{x^3}{\alpha\beta\gamma} - \frac{x^4}{\alpha\beta\gamma\delta} + \text{etc.},$$

wird daher der folgende Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{x}{s} = \alpha + \cfrac{\alpha x}{\beta - x + \cfrac{\beta x}{\gamma - x + \cfrac{\gamma x}{\delta - x + \text{etc.}}}}$$

§48 Wenn wir daher hier anstelle von x den Bruch $\frac{x}{y}$ schreiben, dass wir diese Reihe haben

$$s = \frac{x}{\alpha yy} - \frac{xx}{\alpha\beta yy} + \frac{x^3}{\alpha\beta\gamma y^3} - \frac{x^4}{\alpha\beta\gamma\delta y^4} + \text{etc.},$$

wird daher der folgende Kettenbruch entsprießen

$$\frac{x}{s} = \alpha y + \cfrac{\alpha xy}{\beta y - x + \cfrac{\beta xy}{\gamma y - x + \cfrac{\gamma xy}{\delta y - x + \text{etc.}}}}$$

§49 Wir wollen $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$ etc. nehmen, dass ist

$$s = \frac{x}{1 \cdot y} - \frac{xx}{1 \cdot 2 \cdot yy} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot y^3} - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot y^4} + \text{etc.},$$

wo also gilt

$$s = 1 - e^{\frac{-x}{y}},$$

und daher wird dieser Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{x}{1 - e^{\frac{-x}{y}}} = y + \cfrac{xy}{2y - x + \cfrac{2xy}{3y - x + \cfrac{3xy}{4y - x + \text{etc.}}}} = \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{e^{\frac{x}{y}} - 1},$$

woher die folgenden speziellen Formeln erhalten werden werden, indem $x = 1$ und anstelle von y nacheinander die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 etc. genommen werden:

$$\frac{e}{e-1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} = 2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{6}{7 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{e}}{\sqrt[3]{e}-1} = 3 + \cfrac{3}{5 + \cfrac{6}{8 + \cfrac{9}{11 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{\sqrt[4]{e}}{\sqrt[4]{e}-1} = 4 + \cfrac{4}{7 + \cfrac{8}{11 + \cfrac{12}{15 + \text{etc.}}}}$$

etc.

Problem V

Wenn im Allgemeinen eine Reihe von dieser Form vorgelegt war

$$s = \frac{ax}{\alpha y} - \frac{abxx}{\alpha\beta yy} + \frac{abcx^3}{\alpha\beta\gamma y^3} - \frac{abcdx^4}{\alpha\beta\gamma\delta y^4} + \text{etc.},$$

sie in einen Kettenbruch umzuwandeln.

LÖSUNG

§50 Aus der vorgelegten Reihe wollen wir die folgenden bilden

$$t = \frac{bx}{\beta y} - \frac{bcxx}{\beta\gamma yy} + \frac{bcdx^3}{\beta\gamma\delta y^3} - \frac{bcdex^4}{\beta\gamma\delta\varepsilon y^4} + \text{etc.}$$

und

$$u = \frac{cx}{\gamma y} - \frac{cdxx}{\gamma\delta yy} + \frac{cdex^3}{\gamma\delta\varepsilon y^3} - \frac{cdefx^4}{\gamma\delta\varepsilon\zeta y^4} + \text{etc.},$$

so dass gilt

$$s = \frac{ax}{\alpha y}(1-t)$$

und daher

$$\frac{ax}{s} = \frac{\alpha y}{1-t} = \alpha y + \frac{\alpha y t}{1-t}.$$

Es ist aber

$$\frac{\alpha y t}{1-t} = \frac{\alpha y}{-1+\frac{1}{t}} = \frac{\alpha bxy}{-bx+\frac{bx}{t}},$$

woher wird

$$\frac{ax}{s} = \alpha y + \cfrac{\alpha bxy}{-bx + \cfrac{bx}{t}};$$

auf die gleiche Weise wird also aus der Relation

$$t = \frac{bx}{\beta y}(1-u)$$

werden

$$\frac{bx}{t} = \beta y + \cfrac{\beta cxy}{-cx + \cfrac{cx}{u}}$$

und so weiter. Daher wird, nachdem diese Werte ununterbrochen eingesetzt worden sind, dieser Kettenbruch entspringen

$$\frac{ax}{s} = \alpha y + \cfrac{\alpha bxy}{\beta y - bx + \cfrac{\beta cxy}{\gamma y - cx + \cfrac{\gamma dxy}{\delta y - dx + \text{etc.}}}}$$

Daher ergibt sich der folgende Lehrsatz

LEHRSATZ IX

§51 Wenn diese allgemeine Reihe vorgelegt war

$$s = \frac{ax}{\alpha y} - \frac{abxx}{\alpha\beta yy} + \frac{abcx^3}{\alpha\beta\gamma y^3} - \frac{abcdx^4}{\alpha\beta\gamma\delta y^4} + \text{etc.},$$

wird daher dieser Kettenbruch gebildet werden

$$\frac{ax}{s} = \alpha y + \cfrac{\alpha bxy}{\beta y - bx + \cfrac{\beta cxy}{\gamma y - cx + \cfrac{\gamma dxy}{\delta y - dx + \text{etc.}}}}$$

§52 Um diesen Lehrsatz durch eine bemerkenswertes Beispiel zu illustrieren, wollen wir diese Integralformel betrachten

$$Z = \int z^{m-1}dz(1+z^n)^{\frac{k}{m}-1},$$

welches Integral so genommen werde, dass es nach Setzen von $z = 0$ verschwindet, und wir wollen setzen

$$Z = v(1+z^n)^{\frac{k}{n}}$$

und es wird durch Differenzieren sein

$$\begin{aligned} dZ &= z^{m-1}dz(1+z^n)^{\frac{k}{n}-1} \\ &= dv(1+z^n)^{\frac{k}{n}} + kvz^{n-1}fz(1+z^n)^{\frac{k}{n}-1}, \end{aligned}$$

welche Gleichung durch $(1+z^n)^{\frac{k}{n}-1}$ dividiert liefert

$$z^{m-1}dz = dv(1+z^n) + kvz^{n-1}dz$$

und daher

$$\frac{dv}{dz}(1+z^n)+kvz^{n-1}-z^{m-1}=0.$$

§53 Weil ja nach Nehmen eines unendlich kleinen z wird

$$Z=\frac{z^m}{m}=v,$$

lernen wir daher, dass die Größe v durch eine unendliche Reihe solcher Art ausgedrückt wird, deren erster Term die Potenz z^m ist, in den folgenden Termen aber die Exponenten von z ununterbrochen um die Zahl n vermehrt werden; deswegen wollen wir für v die folgende unendliche Reihe ansetzen

$$v=Az^m-Bz^{m+n}+Cz^{m+2n}-Dz^{m+3m}+\text{etc.},$$

welchen Wert wir in der Differentialgleichung einsetzen wollen und die gleichen Potenzen von z auf die folgende Weise untereinander schreiben wollen

$$\begin{array}{rllllll}
\frac{dv}{dz} & = mAz^{m-1} & -(m+n)Bz^{m+n-1} & +(m+2n)Cz^{m+2n-1} & -(m+3n)Dz^{m+3n-1} & +\text{etc.},\\
\frac{z^n dv}{dz} & = & +\quad mA & -(m+\ n)B & +(m+2n)C & -\text{etc.},\\
+kvz^{n-1} & = & +\quad kA & -\quad kB & +\quad kC & -\text{etc.},\\
-\quad z^{m-1} & =-1. & & & &
\end{array}$$

§54 Wenn daher nun die einzelnen Potenzen von z jeweils zu Null gemacht werden, werden die folgenden Werte erhalten werden:

$$\begin{aligned} mA-1&=0, \quad \text{also} \quad A=\frac{1}{m},\\ -(m+n)B+(m+k)A&=0, \quad \text{also} \quad B=\frac{(m+k)A}{m+n},\\ (m+2n)C-(m+n+k)B&=0, \quad \text{also} \quad C=\frac{(m+n+k)B}{m+2n},\\ -(m+3n)D+(m+2n+k)C&=0, \quad \text{also} \quad D=\frac{(m+2n+k)C}{m+3n},\\ \text{etc.} & \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

Wir wollen also diese gefundenen Werte einsetzen und werden für v die folgende unendliche Reihe auffinden:

$$\begin{aligned} v=\frac{1}{m}z^m-\frac{m+k}{m(m+n)}z^{m+n}+\frac{(m+k)(m+n+k)}{m(m+n)(m+2n)}z^{m+2n}\\ +\frac{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)}{m(m+n)(m+2n)(m+3n)}z^{m+3n}+\text{etc.}, \end{aligned}$$

welche Reihe, um sie auf die Form unseres Lehrsatzes zurückzuführen, wir auf diese Weise darstellen wollen

$$v=\frac{z^{m-n}}{m}\left\{\begin{aligned} z^n-\frac{m+k}{m+n}z^{2n}+\frac{(m+k)(m+n+k)}{(m+n)(m+2n)}z^{3n}\\ -\frac{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)}{(m+n)(m+2n)(m+3n)}z^{4n}+\text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

§56 Weil nun gilt

$$Z = \int z^{m-1} dz (1+z^n)^{\frac{k}{n}-1},$$

wollen wir setzen

$$V = \frac{mZ}{z^{m-n}(1+z^n)^{\frac{k}{n}}},$$

dass wird

$$V = z^n - \frac{m+k}{m+n} z^{2n} + \frac{(m+k)(m+n+k)}{(m+n)(m+2n)} z^{3n} - \frac{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)}{(m+n)(m+2n)(m+3n)} z^{4n} + \text{etc.};$$

es wird also V eine durch Integration der Differentialformel zu findende Funktion von z sein, welche also für jeglichen Wert von z einen bestimmten Wert erhält, weil wir ja das Integral so genommen zu werden festlegen, dass es nach Setzen von $z = 0$ verschwindet. Damit wir aber diese Werte von v leichter angeben können, wann immer z gebrochene Werte zugeteilt werden, wollen wir im Allgemeinen setzen

$$z^n = \frac{x}{y},$$

so dass wir diese Form erlangen

$$V = \frac{x}{y} - \frac{(m+k)xx}{(m+n)yy} + \frac{(m+k)(m+n+k)x^3}{(m+n)(m+2n)y^3} - \frac{(m+k)(m+n+k)(m+2n+k)x^4}{(m+n)(m+2n)(m+3n)y^4} + \text{etc.},$$

welche Reihe mit unserem Lehrsatz verglichen liefert

$$s = V,$$

dann aber

$$\begin{aligned} &a = 1, \quad b = m+k, \quad c = m+n+k \quad \text{etc.},\\ &\alpha = 1, \quad \beta = m+n, \quad \gamma = m+2n \qquad \text{etc.,} \end{aligned}$$

§57 Nachdem diese Dinge im Voraus bemerkt worden sind, gibt uns die angenommene Integralformel diesen Kettenbruch an die Hand:

$$\frac{x}{V} = y + \cfrac{(m+k)xy}{(m+n)y-(m+k)x+\cfrac{(m+n)(m+n+k)xy}{(m+2n)y-(m+n+k)x+\cfrac{(m+2n)(m+2n+k)xy}{(m+3n)y-(m+2n+k)x+\text{etc.}}}}$$

dessen Wert sein wird

$$\frac{xz^{m-n}(1+z^n)^{\frac{k}{n}}}{mZ}.$$

§58 Eines Beispiels wegen wollen wir diese Form nehmen

$$Z = \int \frac{dz}{\sqrt{1+zz}} = \log(z+\sqrt{1+zz});$$

es wird also $m=1$, $n=1$, $k=1$ sein und es wird werden

$$V = \frac{z\log(z+\sqrt{1+zz})}{\sqrt{1+zz}},$$

welcher Wert dieser Reihe gleich wird

$$zz - \frac{2}{3}z^4 + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}z^6 - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7}z^8 + \text{etc.},$$

welche, wenn wir anstelle von zz den Bruch $\frac{x}{y}$ schreiben, werden wird

$$V = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}} \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+y}}{\sqrt{y}} = \frac{x}{y} - \frac{2}{3} \cdot \frac{xx}{yy} + \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}\frac{x^3}{y^3} - \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} \cdot \frac{x^4}{y^4} + \text{etc.};$$

daher wird der daraus gebildete Kettenbruch dieser sein

$$\frac{\sqrt{x(x+y)}}{\log \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+y}}{\sqrt{y}}} = y + \cfrac{1 \cdot 2xy}{3y - 2x + \cfrac{3 \cdot 4xy}{5y - 4x + \cfrac{5 \cdot 6xy}{7y - 6x + \cfrac{7 \cdot 8xy}{9y - 8x + \text{etc.}}}}}$$

§59 Wenn wir daher also $x = 1$ und $y = 1$ nehmen, werden wir diesen Kettenbruch haben

$$\frac{\sqrt{2}}{\log(1+\sqrt{2})} = 1 + \cfrac{1 \cdot 2}{1 + \cfrac{3 \cdot 4}{1 + \cfrac{5 \cdot 6}{1 + \text{etc.}}}}$$

während die unendliche Reihe selbst diese ist

$$\frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} - \text{etc.}$$

Wenn wir aber, während $x = 1$ bleibt, $y = 2$ nehmen, wird die unendliche Reihe diese sein

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{8} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{16} + \text{etc.},$$

der Kettenbruch hingegen dieser

$$\frac{\sqrt{3}}{\log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = 2 + \cfrac{1\cdot 2\cdot 2}{4 + \cfrac{3\cdot 4\cdot 2}{6 + \cfrac{5\cdot 6\cdot 2}{8 + \text{etc.}}}}$$

woher die folgende Form abgeleitet wird

$$\frac{\sqrt{3}}{2\log\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{6}{3 + \cfrac{15}{4 + \cfrac{28}{5 + \text{etc.}}}}}$$

wo die Zähler alle ungeraden Dreieckszahlen sind.

§60 Wir wollen noch den Fall entwickeln, in welchem $x = 1$ und $y = 3$ ist, weil das die Irrationalität auf diese Weise beseitigt werden wird; es wird aber in diesem Fall sein

$$\frac{1}{4}\log 3 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{1}{27} - \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{1}{81} + \text{etc.};$$

der daher entsprießende Kettenbruch wird aber dieser sein

$$\frac{4}{\log 3} = 3 + \cfrac{1\cdot 2\cdot 3}{7 + \cfrac{3\cdot 4\cdot 3}{11 + \cfrac{5\cdot 6\cdot 3}{15 + \cfrac{7\cdot 8\cdot 3}{19 + \text{etc.}}}}}$$

§61 Weil ich ja also hier eine gänzlich neue Methode eröffnet habe, irgendwelche unendliche Reihen in Kettenbrüche umzuwandeln, glaube ich wohl mit Recht, die Lehre der Kettenbrüche nicht unwesentlich bereichert zu haben. Diesen Dingen möchte ich nur noch einen sehr bemerkenswerten Lehrsatz hinzufügen, mit welchem wir oben in §42 den Bruch

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \text{etc.}}}}} = \frac{1}{e-1}$$

in diesen transformiert haben

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \text{etc.}}}} = \frac{1}{e-2},$$

welcher sich um Vieles weiter erstreckende sich so verhält.

Lehrsatz X

§62 Wenn galt

$$s = \cfrac{aA}{\alpha A + \cfrac{bB}{\beta B + \cfrac{cC}{\gamma C + \text{etc.}}}}$$

wird auch gelten

$$\frac{bs}{a - \alpha s} = \beta A + \cfrac{cA}{\gamma B + \cfrac{dB}{\delta C + \cfrac{eC}{\varepsilon D + \text{etc.}}}}$$

Beweis

Weil nämlich gilt

$$s = \cfrac{aA}{\alpha A + \cfrac{bB}{\beta B + \cfrac{cC}{\gamma C + \text{etc.}}}}$$

wenn wir den ersten Bruch durch A, den zweiten durch B, den dritten durch C etc. teilen, wird hervorgehen

$$s = \cfrac{a}{\alpha + \cfrac{b:A}{\beta + \cfrac{c:B}{\gamma + \cfrac{d:D}{\delta + \text{etc.}}}}}$$

Nun wollen wir den zweiten Bruch dieser Form mit A erweitern, den dritten mit B, den vierten mit C und so weiter und wir werden diese Form erlangen

$$s = \cfrac{a}{\alpha + \cfrac{b}{\beta A + \cfrac{cA}{\gamma B + \cfrac{dB}{\delta C + \text{etc.}}}}}$$

daher, wenn wir setzen

$$t = \beta A + \cfrac{cA}{\gamma B + \cfrac{dB}{\delta C + \text{etc.}}}$$

wird gelten

$$s = \cfrac{a}{\alpha + \cfrac{b}{t}} = \frac{at}{\alpha t + b},$$

woher aufgefunden werden wird

$$t = \frac{bs}{a - \alpha s},$$

Q.E.D.